Научная статья
УДК 517
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-18-41

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ НА ГРУППЕ ЭНГЕЛЯ

Александр Валерьевич Грешнов[1]
Максим Владимирович Трямкин[2]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

[2]МИРЭА - Российский технологический университет,
Москва, Россия,

[1]greshnov@math.nsu.ru;https://orchid.org/0000-0002-1218-2767
[2]tryamkin@mirea.ru

Аннотация

На канонической группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ изучены свойства cc-кратчайших, являющихся «поднятием» cc-кратчайших канонической первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$. На основе полученных результатов на канонической группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ введены в рассмотрение специальные (q_1, q_2)-квазиметрики d_{cq}, не являющиеся аналогами Box-квазиметрик, и изучены их свойства. Доказано, что для достаточно широкого набора параметров α, β (q_1, q_2)-квазиметрики d_{cq} не являются $(1, q)$-квазиметриками.

Ключевые слова и фразы

(q_1, q_2)-квазиметрика, Box-квазиметрика, группа Гейзенберга, группа Энгеля, метрика Карно—Каратеодори, cc-кратчайшая.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН проект FWNF 2026-0022.

Для цитирования

Грешнов А. В., Трямкин М. В. Об одной функции расстояния на группе Энгеля // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 18-41. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-18-41

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 18-41
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41

On some distance function on the Engel group

Alexandr V. Greshnov[1], **Maxim V. Tryamkin**[2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk, Russia

[2]MIREA - Russian Technological University,
Moscow, Russia

[1]greshnov@math.nsu.ru
[2]tryamkin@mirea.ru

Abstract

On the canonical Engel group $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ the properties of the *cc*-shortest, which are «uplift» of the *cc*-shortest of canonical first Heisenberg group $\mathbb{H}^1_\alpha$, are studied. Based on the results obtained on the canonical Engel group $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, special (q_1, q_2)-quasimetrics d_{cq} are introduced, which are not analogous to the Box-quasimetrics, and their properties are studied. It is proved that for a sufficiently wide set of parameters α, β (q_1, q_2)-quasimetrics d_{cq} are not $(1, q)$-quasimetrics.

Keywords

(q_1, q_2)-quasimetric, Box-quasimetric, Heisenberg group, Engel group, Carnot–Carathéodory metric, *cc*-shortest.

Funding

The work was carried out within the framework of a state assignment IM SB RAS project FWNF 2026-0022.

For citation

Greshnov A. A., Tryamkin M. V., On some distance function on the Engel group // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-18-41

§ 1. Введение и постановка задачи

(q_1, q_2)-квазиметрическим пространством [1]–[3] называется пара (X, ρ_X), где X — некоторое множество, содержащее не менее двух элементов, $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества

$$\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 18-41
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41

(в этом случае говорят, что ρ_X — *функция расстояния*) и (q_1, q_2)-*обобщенному неравенству треугольника*, т. е.

$$\rho_X(x, y) \leq q_1\rho_X(x, z) + q_2\rho_X(z, y) \quad \forall x, y, z \in X, \quad q_1, q_2 > 0.$$

Несложно показать, что $q_1, q_2 \geq 1$.

Если $q_1 = q_2 = 1$, тогда (X, ρ_X) — квазиметрическое пространство [4]. Если для (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, d_X) выполняется условие *обобщенной симметрии*

$$\rho_X(x, y) \leq q_0\rho_X(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

где $q_0 \geq 1$, то (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является q_0-симметрическим; в случае $q_0 = 1$ используется понятие симметрического (q_1, q_2)-квазиметрического пространства. Несложно установить, что любое симметрическое (q_1, q_2)- квазиметрическое пространство является и (q_2, q_1)-квазиметрическим. Метрическое пространство — это симметрическое $(1, 1)$-квазиметрическое пространство.

Частными случаями (q_1, q_2)-квазиметрических пространств являются b-метрические пространства.

Определение 1.1 ([5, 6, 7])**.** Пара (X, d), где X — некоторое множество, $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая симметрическая функция расстояния, удовлетворяющая $\widehat{Q}$-обобщеному неравенству треугольника

$$d(x, z) \leq \widehat{Q}(d(x, y) + d(y, z)), \quad \widehat{Q} = const \quad \forall x, y, z \in X \tag{1.1}$$

называется b-*метрическим* пространством.

В литературе, связанной функциональными пространствами и теорией отображений, b-метрические пространства также называют квазиметрическими пространствами, см. [8].

Нетривиальными примерами (q_1, q_2)-квазиметрических пространств являются пространства $(L_p(E), \rho_{L_p(E)})$, $\rho_{L_p(E)}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_p$, где $0 < p < 1$, E — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$ —стандартная норма пространства $L_p(E)$, и пространства Карно—Каратеодори $\mathcal{M}$, снабженные $\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}$-квазиметриками [9]–[13].

Концепция (q_1, q_2)-квазиметрических пространств была введена в работах [1]– [3], где была разработана теория точек совпадения двух отображений, действующих в этих пространствах, одно из которых является накрывающим, а другое липшицевым.

Для данной функции расстояния ρ_X рассмотрим совокупность всех пар (q_1, q_2) таких, что для ρ_X выполняется (q_1, q_2)-обобщенное неравенство треугольника. Множество $Q = Q(X, \rho_X)$ всех таких пар (q_1, q_2) мы назовем *областью допустимых параметров* для (q_1, q_2)-квазиметрики ρ_X. Вообще говоря, для произвольной функции расстояния множество $Q(X, \rho_X)$ может оказаться и пустым. Таким образом, ρ_X является некоторой (q_1, q_2)-квазиметрикой тогда и только тогда, когда $Q(X, \rho_X) \neq \emptyset$. Говоря о том, что функция расстояния ρ_X является (q_1, q_2)-квазиметрикой, мы подразумеваем, что $Q(X, \rho_X) \neq \emptyset$, а (q_1, q_2) — некоторая точка из множества $Q(X, \rho_X)$.

Особый интерес представляют $(1, q)$-квазиметрические пространства (strong b-metric spaces [7]). Такие пространства билипшицево эквивалентны квазиметрическим, см. [7, 9]. Отметим, что для (q_1, q_2)-квазиметрик ρ_X таких, что $Q(X, \rho_X) = \{(q_1, q_2) \mid q_1 > 1,\ q_2 > 1\}$, квазиметрик, билипшицево эквивалентных ρ_X, может и не существовать, см. [9].

Свойство 1.2 (см. [1]). Симметрическая $(q, 1)$-квазиметрика непрерывна по каждому из аргументов.

Непрерывность в Свойстве 1.2 подразумевается в топологии, индуцированной «открытыми» (q_1, q_2)-квазиметрическими шарами, см. [1].

Следствие 1.3. Если симметрическая (q_1, q_2)-квазиметрика не является непрерывной хотя бы по одному из аргументов, то она и не является $(q, 1)$-квазиметрикой.

Группы Карно $\mathbb{G}$ и более общие эквирегулярные пространства Карно—Каратеодори $\mathcal{M}$, снабженные Box-квазиметриками $\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}$, являются важными частными случаями симметрических $(1, q_2)$-квазиметрических пространств [9]–[12]; более того, $q_2 \neq 1$ в общем случае, см. [11]. Box-квазиметрики были введены Найджелом, Стейном и Вэйнгером в работе [13] для получения оценок ядер некоторых неэллиптических дифференциальных операторов (типа сублапласиана), индуцированных векторными полями, удовлетворяющими условию Хермандера. Box-квазиметрики играют огромную роль в геометрическом анализе на пространствах Карно—Каратеодори [12].

Рассмотрим связное гладкое многообразие $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = N$, и C^∞-гладкие векторные поля $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n < N$, удовлетворяющие условию Хермандера на $\mathcal{M}$ (субриманово многообразие [12, 15, 16]). Векторные поля $X_1, \ldots, X_n$ и подрасслоение $H_{\mathcal{M}} \subset T\mathcal{M}$, натянутое на $X_1, \ldots, X_n$, называются *горизонтальными*. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma = \gamma(s) : [0, s_0] \to \mathcal{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(s) \in H_{\mathcal{M}}(\gamma(s))$ почти всюду. По теореме Рашевского—Чоу [12, 15, 16] любые две точки $u, v \in \mathcal{M}$ можно соединить горизонтальной кривой γ конечной длины $l(\gamma)$; здесь длина $l(\gamma)$ параметризованной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ вычисляется по формуле $l(\gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{g_{\mathcal{M}}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\,dt$, где $g_{\mathcal{M}}(\cdot,\cdot)$ — форма стандартного риманова скалярного произведения многообразия $\mathcal{M}$.

Определение 1.4. *Расстояние Карно—Каратеодори* $r_{cc}(u,v)$ для любых двух точек $u,v\in\mathcal{M}$ определяется как

$$r_{cc}(u,v)=\inf_{\gamma}\{l(\gamma)\mid \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая точки } u,v\}.$$

В дальнейшем абсолютно непрерывную горизонтальную кривую γ, соединяющую точки u,v, такую, что $r_{cc}(u,v)=l(\gamma)$, мы будем называть *cc-кратчайшей.*

Пусть векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, удовлетворяющие условию Хермандера, таковы, что размерность h_i векторного подпространства $H_i(x)\subset T_x\mathcal{M}$, $x\in\mathcal{M}$, натянутого на значения всех коммутаторов векторных полей $X_1,\dots,X_n$ до порядка $i-1$, $i=1,\dots,r$, включительно (под коммутаторами нулевого порядка подразумеваются векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$), не зависит от выбора x для каждого i, $h_1=n$ (см. [15]). В этом случае будем говорить, что многообразие $\mathcal{M}$ обладает *эквирегулярной поляризацией* H_1 с базисом векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, а пару ($\mathcal{M}$,r_{cc}) будем называть *эквирегулярным пространством Карно — Каратеодори* (ср. с [15]). Определим векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ так, что $X_1(x),\dots,X_{h_i}(x)$ образуют базис векторного пространства $H_i(x)$ для всех $x\in\mathcal{M}$. Можно проверить, что векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ удовлетворяют следующей таблице коммутаторов

$$[X_i,X_j]=\sum_{\deg X_k\le \deg X_i+\deg X_j} C_{ij}^k X_k,$$

где $\deg X_i=\min\{j\mid X_i\subset H_j\}$. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}(g,u)=\max_{i=1,\dots,N}\bigl\{|a_i|^{1/\deg X_i}\mid u=\exp(X_a)(g)\bigr\},\tag{1.2}$$

где $X_a=\sum\limits_{i=1}^N a_iX_i$, $a=(a_1,\dots,a_N)$ — достаточно малый по длине вектор, $\exp(X_a)(g)=x(1)$, $x(s)$ — решение следующей задачи Коши

$$\dot x(s)=X_a(x(s)),\quad s\in[0,1],\quad x(0)=g.$$

Из (1.2) вытекает, что функция $\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}$ удовлетворяет аксиоме тождества, а также аксиоме симметричности. Кроме того, в случае эквирегулярных пространств Карно — Каратеодори имеет место следующий факт, вытекающий из известной теоремы Ball-Box, доказанной Найгелом, Стейном и Вайнгером [13].

Теорема 1.5 (Ball-Box). *Для каждой точки $u \in \mathcal{M}$ найдутся ее окрестность $O_u \subset \mathcal{M}$ и константа $c_u > 0$ такие, что*

$$\frac{\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}(v,w)}{c_u} \leq r_{cc}(v,w) \leq c_u \mathrm{Box}_{\mathcal{M}}(v,w) \quad \forall v,w \in O_u.$$

Важным частным случаем эквирегулярных пространств Карно—Каратеодори являются группы Карно (см. [17, 18]), в частности, группы Гейзенберга и Энгеля (см. [14, 19]).

В связи со сложной структурой cc-кратчайших (см., например, [20]–[25]) метрика r_{cc} малопригодна для вычислений. Учитывая Теорему Ball-Box, для получения тех или иных оценок на эквирегулярных пространствах Карно — Каратеодори практически всегда используются некоторые эквивалентные метрике Карно — Каратеодори q_0-симметрические (q_1, q_2)-квазиметрики типа $\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}$ (см., например, [12, 13]). В настоящей работе на канонической группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ (см. § 5) мы определяем некоторую (q_1, q_2)-квазиметрику d_{cq}, в каком-то смысле занимающую «промежуточное» место между метрикой Карно—Каратеодори и Box-квазиметрикой группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$. Идея конструкции данной (q_1, q_2)-квазиметрики d_{cq} основана, с одной стороны, на естественной взаимосвязи канонических группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ (см. § 2) и группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ (см. § 3), с другой стороны — на свойствах cc-кратчайших группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ (см., например, [20]). Фактически, мы «поднимаем» cc-кратчайшие группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ до cc-кратчайших группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ и «достраиваем» полученное распределение cc-кратчайших группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ при помощи элементов центра группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ до 2-звенных ломаных, на основе которых вводится (q_1, q_2)-квазиметрика d_{cq} (§ 5.1). В работе установлено, что функция d_{cq} инвариантна относительно действия однопараметрической подгруппы растяжений и левых сдвигов группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ (Теорема 5.1), является симметрической функцией расстояния (Следствие 5.2, Теорема 5.1), билипшицево эквивалентной метрике Карно—Каратеодори группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ (Теорема 5.5), откуда сразу вытекает $\widehat{Q}$-обобщенное неравенство треугольника (1.1) для d_{cq} (Следствие 5.6). При этом существуют параметры α, β такие, что функция расстояния d_{cq} не будет $(1, q)$-квазиметрикой (Утверждение 5.8).

Отметим, что в последнее время активно исследуются свойства cc-кратчайших группы Энгеля. Так, в работе В. Н. Берестовского и И. А. Зубаревой [26] с помощью принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстродействия в координатах первого рода найдены экстремали произвольной левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля, определяемой распределением ранга 2. В работах А. А. Ардентова и Ю. Л. Сачкова [21]–[24] проведено детальное исследование левоинвариантной субримановой метрики на группе Энгеля; в работе А. Ю. Попова и Ю. Л. Сачкова [25] описана структура пересечения субримановой сферы на группе Энгеля с двумерным инвариантным множеством дискретных симметрий. Координаты, используемые в работах [21]–[25], отличаются от координат 1-го рода, которые лежат в основе определения канонической группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$. Из результатов работ [21]–[24] вытекает, что все *cc*-кратчайшие группы Энгеля являются гладкими кривыми. В работах [24], [25] получены описания точек группы Энгеля, которые соединяются с ее нейтральным элементом более чем одной *cc*-кратчайшей; настоящая работа и работы [24], [25] используют разные системы координат, тем не менее, результаты Свойств 4.5, 4.6 в некотором виде содержатся в соответствующих результатах работ [24], [25].

§ 2. Каноническая группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$

Определение 2.1 ([11]). *Канонической* (*первой*) группой Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ называется аффинно-векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t) и групповой операцией $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определяемой правилом

$$w \cdot w' = L_w w' = (x, y, t) \cdot (x', y', t') = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\Big), \quad (2.1)$$

Групповая операция строится здесь при помощи формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа [27] (см. детали, например, в [11]). Нейтральный элемент группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ совпадает с $O' = (0, 0, 0)$; для любого $w = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1_\alpha$ мы имеем $w^{-1} = (-x, -y, -t) = -w$.

Значение базисных левоинвариантных векторных полей X, Y, T (базис Якоби [17]) в каждой точке $w = (x, y, t)$ определяется как

$$(X, Y, T)(w) = \frac{\partial L_w(x', y', t')}{\partial(x', y', t')}\Big|_{(x', y', t') = (0,0,0)};$$

их координатная запись имеет вид

$$X = \big(1, 0, -\frac{\alpha}{2} y\big), \quad Y = \big(0, 1, \frac{\alpha}{2} x\big), \quad T = (0, 0, 1). \quad (2.2)$$

Нетрудно проверить, что векторные поля X, Y, T удовлетворяют следующей «таблице коммутаторов»

$$[X, Y] = \alpha T, \quad [X, T] = [Y, T] = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Векторные поля X, Y, T являются каноническими [28] в следующем смысле

$$\exp(s(aX + bY + cT))(O') = (sa, sb, sc), \quad a, b, c = const, \quad s \in [0, s_0].$$

Определим Box-квазиметрику $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ на группе $\mathbb{H}^1_\alpha$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{H}^1_\alpha$, тогда $v = u \cdot (u^{-1}v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{H}^1_\alpha$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}\}. \tag{2.4}$$

Однопараметрическая подгруппа растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{H}^1_\alpha \to \mathbb{H}^1_\alpha$, $\varepsilon \geq 0$, действует на элементы $u = (x, y, t)$ по правилу

$$\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t).$$

Следующие свойства, называемые *инвариантностью Box-квазиметрики относительно действий растяжений и левых сдвигов*, являются прямым следствием фактов общей теории, см. [17], но их несложно проверить непосредственно:

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v),$$
$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(L_w u, L_w v) = \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}^1_\alpha.$$

Векторные поля X, Y — горизонтальные. Пусть $\sigma = \sigma(s) = (x, y, t)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$, $\sigma(0) = (x_0, y_0, t_0)$, $s \in [0, s_0]$, — горизонтальная кривая. Тогда для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется

$$\dot\sigma(s) = \dot x(s) X(\sigma(s)) + \dot y(s) Y(\sigma(s)) = \Big(\dot x, \dot y, \frac{\alpha}{2}(x\dot y - y\dot x)\Big),$$

откуда

$$\dot t(s) = \frac{\alpha}{2}(x\dot y - y\dot x). \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует

$$t(s) = t_0 + \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^s (x\dot y - y\dot x)\, ds. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) можно интерпретировать как формулу восстановления горизонтальной кривой $\sigma(s)$ по ее «горизонтальной составляющей» $(x, y)(s)$ и начальному условию (x_0, y_0, t_0).

§ 3. Каноническая группа Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$

Определение 3.1 ([11, 19])**.** *Канонической* группой Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ называется аффинно-векторное пространство $\mathbb{R}^4$ с системой координат (x, y, t, z) и групповой операцией $\cdot : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, определяемой правилом

$$\begin{aligned} w \cdot w' &= P_w(x', y', t', z') = \\ &= (x, y, t, z) \cdot (x', y', t', z') = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \\ &\qquad z + z' + \frac{\beta}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta}{12}(x - x')(xy' - x'y)\Big), \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Групповая операция строится здесь при помощи формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа [27] (см. детали, например, в [11]). Нейтральный элемент группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ совпадает с началом координат $O = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$; для любого элемента $w = (x,y,t,z)$ обратный к нему элемент имеет вид

$$w^{-1} = (-x,-y,-t,-z) = -w.$$

Значение базисных левоинвариантных векторных полей X,Y,T,Z (базис Якоби [17]) в каждой точке $w = (x,y,t,z)$ определяется как

$$(X,Y,T,Z)(w) = \frac{\partial P_w(x',y',t',z')}{\partial(x',y',t',z')}\Big|_{(x',y',t',z')=(0,0,0,0)};$$

их координатная запись имеет вид

$$X = \Big(1,0,-\frac{\alpha}{2}y,-\frac{\beta}{2}x-\frac{\alpha\beta}{12}xy\Big), \quad Y = \Big(0,1,\frac{\alpha}{2}x,\frac{\alpha\beta}{12}x^2\Big),$$
$$T = \Big(0,0,1,\frac{\beta}{2}x\Big), \quad Z = (0,0,0,1). \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что векторные поля X,Y,T,Z удовлетворяют следующей «таблице коммутаторов»

$$\begin{cases} [X,Y] = \alpha T, \\ [X,T] = \beta Z, \end{cases} \tag{3.3}$$

все остальные возможные коммутаторы X,Y,T,Z равны $\vec{0}$. Векторные поля X,Y,T,Z являются каноническими [28] в следующем смысле

$$\exp(s(aX+bY+cT+fZ))(O) = (sa,sb,sc,sf), \quad a,b,c,f = const, \quad s \in [0,s_0].$$

Определим Box-квазиметрику $\mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}$ на группе $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ следующим образом. Пусть $u,v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, тогда $v = u\cdot(u^{-1}v) = uc$, где $c = (c_1,c_2,c_3,c_4) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(u,v) = \max\{|c_1|,|c_2|,|c_3|^{\frac{1}{2}},|c_4|^{\frac{1}{3}}\}. \tag{3.4}$$

Однопараметрическая подгруппа растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $\varepsilon \geq 0$, действует на элементы $u = (x,y,t,z)$ по правилу

$$\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 z).$$

Следующие свойства, называемые *инвариантностью Box-квазиметрики относительно действий растяжений и левых сдвигов*, являются прямым следствием фактов общей теории, см. [17], но их несложно проверить непосредственно:

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(\delta_\varepsilon u,\delta_\varepsilon v) = \varepsilon \mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(u,v),$$

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(P_w u, P_w v) = \mathrm{Box}_{\mathbb{E}_{\alpha,\beta}}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}.$$

Сравнивая выражения (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), мы видим, что группу Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ можно рассматривать как своего рода «расширение» группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$.

Левоинвариантные векторные поля X, Y из (3.2) — горизонтальные. Пусть $\gamma = \gamma(s) = (x, y, t, z)(s) \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $\gamma(0) = (x_0, y_0, t_0, z_0)$, $s \in [0, s_0]$, — горизонтальная кривая. Тогда для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется

$$\dot\gamma(s) = \dot x(s)X(\gamma(s)) + \dot y(s)Y(\gamma(s)) = \Big(\dot x, \dot y, \frac{\alpha}{2}(x\dot y - y\dot x), (-\frac{\alpha\beta}{12}xy - \frac{\beta}{2}t)\dot x + \frac{\alpha\beta}{12}x^2\dot y\Big),$$

откуда

$$\begin{cases} \dot t(s) = \frac{\alpha}{2}(x\dot y - y\dot x), \\ \dot z(s) = (-\frac{\alpha\beta}{12}xy - \frac{\beta}{2}t)\dot x + \frac{\alpha\beta}{12}x^2\dot y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует

$$\begin{cases} t(s) = t_0 + \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^s (x\dot y - y\dot x)\, ds, \\ z(s) = z_0 + \int\limits_0^s \Big((-\frac{\alpha\beta}{12}xy - \frac{\beta}{2}t)\dot x + \frac{\alpha\beta}{12}x^2\dot y\Big)\, ds. \end{cases} \tag{3.6}$$

Формулы (3.6) можно интерпретировать как формулы восстановления горизонтальной кривой $\gamma(s)$ по ее «горизонтальной составляющей» $(x, y)(s)$ и начальному условию (x_0, y_0, t_0, z_0).

С другой стороны, сравнивая «способы восстановления» (2.6), (3.6), можно сказать, что (3.6)— «поднятие» горизонтальной кривой $\sigma \subset \mathbb{H}^1_\alpha$ до горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ (понятно, что такое «поднятие» не единственно в силу произвольности начального условия z_0). Чтобы подчеркнуть, что горизонтальная кривая γ группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ является «поднятием» соответствующей горизонтальной кривой σ группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, мы будем использовать обозначение γ_σ.

Пусть $\gamma(0) = O$, $\gamma(s_0) = (x_0, y_0, t_0, z_0)$, тогда

$$t(s_0) = \frac{\alpha}{2}x(s_0)y(s_0) - \alpha\int\limits_\gamma y\, dx, \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
z(s_0) = \int\limits_\gamma -\frac{\alpha\beta}{12}xy\,dx - \frac{\beta}{2}t\,dx + \frac{\alpha\beta}{12}x^2\,dy \\
= -\frac{\beta}{2}t(s_0)x(s_0) + \frac{\beta}{2}\int\limits_\gamma x\,dt + \frac{\alpha\beta}{12}\int\limits_\gamma x(x\,dy - y\,dx) \\
= -\frac{\beta}{2}t(s_0)x(s_0) + \frac{\beta}{2}\int\limits_\gamma x\,dt + \frac{\beta}{6}\int\limits_\gamma x\,dt = -\frac{\beta}{2}t(s_0)x(s_0) + \frac{2\beta}{3}\int\limits_\gamma x\,dt \\
= \frac{\beta}{6}t(s_0)x(s_0) - \frac{2\beta}{3}\int\limits_\gamma t\,dx \quad (3.8)
\end{aligned}
$$

Если $\dot{x}(s) = 0$ почти всюду, то, с учетом $\gamma(0) = O$, мы получаем, что $\gamma(s) = \exp(sY)(O)$.

§ 4. cc-кратчайшие группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, восстановленные по cc-кратчайшим группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$

Замечание 4.1. В дальнейшем символом ρ_{cc} мы обозначаем метрику Карно—Каратеодори группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$.

Известно, см., например, [17], что метрика Карно—Каратеодори групп Карно инвариантна относительно действия однопараметрической подгруппы растяжений и левых сдвигов группы Карно.

Свойство 4.2. *Пусть $\sigma = \sigma(s) = (x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющая точки с координатами $(0, 0, 0)$ и (x_0, y_0, t_0). Тогда $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma(s) = (x, y, t, z)(s)$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, соединяющая точки O и $M_0 = (x_0, y_0, t_0, z_0)$, где функция $z(s)$ получена по формуле из (3.6), точка z_0 удовлетворяет (3.8).*

Доказательство. Отметим, что длина кривой $\sigma \subset \mathbb{H}^1_\alpha$ равна длине кривой $\gamma \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$. Предположим, что на группе $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ найдется горизонтальная кривая $\gamma' = \gamma'(s) = (x', y', t', z')(s)$, соединяющая точки O, M_0, такая, что длина γ_σ больше длины γ'. Кривая $\sigma' = \sigma'(s) = (x', y', t')(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$ горизонтальна, ее длина равна длине кривой γ', и она соединяет точки группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ с координатами $(0, 0, 0)$ и (x_0, y_0, t_0). Приходим к противоречию с тем, что $\sigma = \sigma(s) = (x, y, t)(s)$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющая точки с координатами $(0, 0, 0)$ и (x_0, y_0, t_0). ☐

Рассмотрим всевозможные cc-кратчайшие $\sigma = \sigma(s) = (x, y, t)(s)$, $s \in [0, 1]$, группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ с началом в точке с координатами $(0, 0, 0)$, параметризованные длиной дуги. Они имеют вид (см. [20])

$$\begin{cases} x(s) = C_1 \sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s) + C_2(1 - \cos\frac{\alpha\lambda}{2}s), \\ y(s) = C_1(1 - \cos\frac{\alpha\lambda}{2}s) - C_1 \sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s), \\ t(s) = \frac{\alpha\lambda s - 2\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s)}{\alpha\lambda^2}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = (C_1^2 + C_2^2)\frac{\alpha^2\lambda^2}{2} = 1, \quad \dot{x}(0) = \frac{\alpha\lambda}{2}C_1,\ \dot{y}(0) = -\frac{\alpha\lambda}{2}C_2;$$

отметим, что случай $\lambda = 0$ в (4.1) соответствует отрезкам интегральных линий векторных полей вида $\dot{x}(0)X + \dot{y}(0)Y$. Если cc-кратчайшие группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины, то

$$\lambda \in \big[-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big];$$

при этом каждой тройке чисел p, ω, λ, где $p^2 + \omega^2 = 1$, $\lambda \in \big(-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big)$ соответствует единственная cc-кратчайшая $\sigma_{p,\omega,\lambda} = \sigma_{p,\omega,\lambda}(s) = (x, y, t)(s)$, $s \in [0, 1]$, такая, что $\dot{x}(0) = p$, $\dot{y}(0) = \omega$, и при этом отображение

$$\psi : (p, \omega, \lambda) \to \sigma_{p,\omega,\lambda}(1)$$

является гомеоморфизмом между множествами $S^1 \times \big(-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha}\big)$, где S^1 — обычная единичная окружность, и $S_{cc}(1) \setminus Z\mathbb{H}^1_\alpha$, где $S_{cc}(1)$ — единичная сфера в метрике Карно—Каратеодори группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ с центром в O', $Z\mathbb{H}^1_\alpha$ — геометрическое место точек центра группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$. Множество $S_{cc}(1) \cap Z\mathbb{H}^1_\alpha$ состоит из двух точек, имеющих координаты $(0, 0, \pm\frac{\alpha}{4\pi})$, каждая из которых соединяется всеми cc-кратчайшими вида $\sigma_{p,\omega,\pm\frac{4\pi}{\alpha}}$ соответственно. Таким образом, имеет место следующее

Свойство 4.3. *Любая точка $M = M(a, b, c) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, соединяется с точкой O' единственной cc-кратчайшей; любая точка $M = M(0, 0, c) \in \mathbb{H}^1_\alpha$ соединяется с точкой O' бесконечным числом cc-кратчайших.*

Используя формулы (3.5), (3.6), учитывая Свойство 4.2, восстановим cc-кратчайшие $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma(s)$ единичной длины группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ с началом в точке O по cc-кратчайшим $\sigma = \sigma(s)$ группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины с началом в точке O'.

Замечание 4.4. *Пусть $\lambda = 0$. Любая сс-кратчайшая группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ с началом в точке O' имеет вид $\sigma_0(s) = (as, bs, 0)$, $a^2 + b^2 = 1$. Тогда, используя (3.8), мы получаем*

$$\gamma_{\sigma_0}(s) = (as, bs, 0, 0), \quad s \in [0, 1].$$

Пусть $\lambda \neq 0$, $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda(s) = (x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda)(s)$ — некоторая cc-кратчайшая группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины, соответствующая выбранному значению λ. Используя (3.7), (3.8), (4.1), мы получаем

$$z_\lambda(s) = \frac{\beta}{6}t_\lambda(s)x_\lambda(s) - \frac{2\beta}{3\lambda}\int\limits_0^s \Big(s - \frac{2\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s)}{\alpha\lambda}\Big)\Big(C_1\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2}) + C_2\sin(\frac{\alpha\lambda s}{2})\Big)\, ds; \tag{4.2}$$

здесь $(x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda, z_\lambda)(s) = (\sigma_\lambda, z_\lambda)(s)$ — cc-кратчайшая группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, восстановленная по σ_λ. Мы имеем, см. (4.2),

$$\begin{aligned} &J(\lambda, s) = \\ &= \int\limits_0^s \Big(s - \frac{2\sin(\frac{\alpha\lambda}{2}s)}{\alpha\lambda}\Big)\Big(C_1\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2}) + C_2\sin(\frac{\alpha\lambda s}{2})\Big)\, ds = C_1\int\limits_0^s s\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2})\, ds \\ &- \frac{2C_1}{\alpha\lambda}\int\limits_0^s \sin(\frac{\alpha\lambda s}{2})\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2})\, ds + C_2\int\limits_0^s s\sin(\frac{\alpha\lambda s}{2})\, ds - \frac{2C_1}{\alpha\lambda}\int\limits_0^s \sin^2(\frac{\alpha\lambda s}{2})\, ds \\ &= \frac{4C_1}{\alpha^2\lambda^2}\Big(\frac{\alpha\lambda s}{2}\sin(\frac{\alpha\lambda s}{2}) + \cos(\frac{\alpha\lambda s}{2}) - 1 - \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\alpha\lambda s}{2})\Big) \\ &+ \frac{4C_2}{\alpha^2\lambda^2}\Big(- \frac{\alpha\lambda s}{2}\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2}) + \sin(\frac{\alpha\lambda s}{2}) + \frac{1}{2}\Big(\sin(\frac{\alpha\lambda s}{2})\cos(\frac{\alpha\lambda s}{2}) - \frac{\alpha\lambda s}{2}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Свойство 4.5. *Если $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha})$, то точка $M_\lambda = (\sigma_\lambda(1), z_\lambda(1)) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ соединяется с точкой O единственной сс-кратчайшей $(\sigma_\lambda, z_\lambda)(s)$, $s \in [0, 1]$.*

Доказательство. Свойство 4.5 вытекает из Свойств 4.2, 4.3 и Замечания 4.4. □

Рассмотрим случай $\lambda = \frac{4\pi}{\alpha}$. В этом случае концевая точка cc-кратчайшей σ_λ группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины имеет координаты $(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi})$. Используя соотношения (4.2), (4.3), мы получаем

$$J(\frac{4\pi}{\alpha}, 1) = -\frac{3C_2}{4\pi} \Rightarrow z_{\frac{4\pi}{\alpha}}(1) = \frac{C_2\alpha\beta}{8\pi} = -\frac{\dot{y}_{\frac{4\pi}{\alpha}}(0)\alpha\beta}{16\pi^2}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) вытекает следующее

Свойство 4.6. *Каждая точка открытого отрезка*

$$I^+ = I^+(\omega) = (0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}, -\frac{\omega\alpha\beta}{16\pi^2}), \quad \omega \in (-1, 1),$$

соединяется с нейтральным элементом O группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ двумя cc-кратчайшими единичной длины с начальными векторами $(\pm p, \omega, 0, 0)$, $p^2 + \omega^2 = 1$, $p > 0$.

Точки $(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}, \frac{\pm\alpha\beta}{16\pi^2})$ соединяются единственными cc-кратчайшими единичной длины с начальными векторами $(0, \mp 1, 0, 0)$ соответственно.

Понятно, что Свойство, аналогичное Свойству 4.6, имеет место и для отрезка

$$I^- = I^-(\omega) = (0, 0, -\frac{\alpha}{4\pi}, \frac{\omega\alpha\beta}{16\pi^2}), \quad \omega \in [-1, 1].$$

§ 5. Функция расстояния d_{cq} и ее свойства

5.1. Определение функции d_{cq}

Для точки $M_1 = M_1(x_0, y_0, t_0, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ такой, что

$$x_0^2 + y_0^2 \neq 0, \quad M_2 = M_2(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha, \quad \rho_{cc}(O', M_2) = 1,$$

рассмотрим cc-кратчайшую $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda(x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины такую, что $\sigma_\lambda(1) = M_2$. Точка M_2 здесь однозначно определяет значение $\lambda \in (-\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{4\pi}{\alpha})$ и соединяется с O' в $\mathbb{H}^1_\alpha$ единственной cc-кратчайшей σ_λ. Далее, рассматриваем поднятие $\gamma_{\sigma_\lambda} = \gamma_{\sigma_\lambda}(x_\lambda, y_\lambda, t_\lambda, z_\lambda)(s) \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $s \in [0, 1]$. Значение $z_\lambda(1)$ здесь определяется однозначно, используя (3.8). Полагаем

$$d_{cq}(O, M_1) = \max\{1, |z'|^{\frac{1}{3}}\}, \quad z' = z_0 - z_\lambda(1). \tag{5.1}$$

Для точек $M_3 = M_3(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ мы имеем $\rho_{cc}(O', M_4) = 1$, где $M_4 = M_4(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}) \in \mathbb{H}^1_\alpha$. Рассмотрим cc-кратчайшую $\sigma_\kappa = \sigma_\kappa(x_\kappa, y_\kappa, t_\kappa)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha$ единичной длины такую, что $\sigma_\kappa(1) = M_4$, $\kappa = \frac{4\pi}{\alpha}$. Далее, рассмотрим поднятие $\gamma_{\sigma_\kappa} = \gamma_{\sigma_\kappa}(x_\kappa, y_\kappa, t_\kappa, z_\kappa)(s) \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $s \in [0, 1]$. Значение $z_\kappa(1)$ определяется однозначно, используя (3.8). Однако, как вытекает из Свойства 4.3, cc-кратчайшая σ_κ здесь определяется неоднозначно. Для наших целей мы можем взять любую такую cc-кратчайшую σ_κ, например, см. Свойство 4.6, такую, что $z_\kappa(1) = 0$. Полагаем

$$d_{cq}(O, M_3) = \max\{1, |z_0|^{\frac{1}{3}}\}. \tag{5.2}$$

Аналогично мы определим значение $d_{cq}(O, M_5)$ для $M_5 = M_5(0, 0, -\frac{\alpha}{4\pi}, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, используя соответствующую cc-кратчайшую $\sigma_{-\kappa} \subset \mathbb{H}^1_\alpha$.

Для точек вида $M_6 = M_6(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ мы полагаем

$$d_{cq}(O, M_6) = |z_0|^{\frac{1}{3}}. \tag{5.3}$$

Заметим, что любая точка $M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ имеет вид $M = \delta_\varepsilon M_i$, $i = 1, 3, 5, 6$, для некоторого подходящего числа $\varepsilon > 0$ Используя этот факт, при помощи (5.1)–(5.3) мы можем определить значение $d_{cq}(O, M)$ для любой точки $M(x_0, y_0, t_0, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ следующим образом

$$d_{cq}(O, M) = \max\{l(\gamma_\sigma), |\tilde{z}|^{\frac{1}{3}}\},$$

где $l(\gamma_\sigma)$ — длина соответствующей «восстановленной» cc-кратчайшей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $\tilde{z}$ принимает значение или z_0 $(x_0^2 + y_0^2 = 0$, см.(5.2),(5.3)), или значение, определяемое как z' $(x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, см. (5.1)). При этом очевидно выполняется

$$d_{cq}(O, \delta_\varepsilon M) = \varepsilon d_{cq}(O, M).$$

Геометрическая реализация значения функции $d_{cq}(O, M)$ для произвольной точки $M = M(x_0, y_0, t_0, z_0) \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ состоит в следующем: строится cc-кратчайшая γ_λ группы Энгеля (восстановленная по соответствующей cc-кратчайшей σ_λ группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющая O' и M'), концевая точка $\widehat{M}$ которой соединяется с точкой M при помощи соответствующего отрезка интегральной линии векторного поля Z длины τ_0; далее $d_{cq}(O, M)$ определяется как $\max\{l(\gamma_\lambda), |\tau_0|^{\frac{1}{3}}\}$. Следовательно,

$$d_{cq}(O, M) = 0 \Leftrightarrow O = M \quad \forall M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}.$$

Так как cc-кратчайшие и интегральные линии левоинвариантных векторных полей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ инвариантны относительно левых сдвигов P_w, то, учитывая все вышесказанное, имеет место следующая

Теорема 5.1. *Функция d_{cq} инвариантна относительно левых сдвигов*

$$d_{cq}(P_w u, P_w v) = d_{cq}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta},$$

и действия однопараметрической группы растяжений

$$d_{cq}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon d_{cq}(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Учитывая Теорему 5.1, геометрическая реализация значения функции $d_{cq}(U, M)$, $U, M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $U = U(x_0, y_0, t_0, z_0)$, $M = M(x_1, y_1, t_1, z_1)$, происходит по следующей схеме: строится cc-кратчайшая γ_σ группы Энгеля (восстановленная по соответствующей cc-кратчайшей σ группы Гейзенберга

$\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющая точки $U' = U'(x_0, y_0, t_0)$ и $M' = M'(x_1, y_1, z_1)$), концевая точка $\widehat{M}$ которой соединяется с точкой M при помощи соответствующего отрезка интегральной линии векторного поля Z длины, τ_M; далее

$$d_{cq}(U, M) = \max\{l(\gamma_\sigma), |\tau_M|^{\frac{1}{3}}\}. \tag{5.4}$$

Следствие 5.2. *Функция d_{cq} удовлетворяет аксиоме тождества.*

5.2. Свойства функции d_{cq}

Теорема 5.3. *Функция d_{cq} удовлетворяет аксиоме симметрии.*

Доказательство. Учитывая Теорему 5.1, нам достаточно проверить, что

$$d_{cq}(O, M) = d_{cq}(M, O) \quad \forall M \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}.$$

Пусть $M = M(x_0, y_0, t_0, z_0)$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. Пусть $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, — cc-кратчайшая группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, параметризованная длиною дуги, соединяющая точки O, U, восстановленная по cc-кратчайшей группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, соединяющей точки $O', M' = M'(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $M = \exp(\tau Z)(U)$. Мы имеем

$$d_{cq}(O, M) = \max\{s_0,\ |\tau|^{\frac{1}{3}}\}.$$

Кривая $P_{MU^{-1}}\gamma(s_0 - s)$, $s \in [0, s_0]$, является cc-кратчайшей группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, соединяющей точки M и MU^{-1}. С другой стороны,

$$MU^{-1} = \exp(\tau Z)(O).$$

Следовательно,

$$d_{cq}(M, O) = \max\{s_0,\ |\tau|^{\frac{1}{3}}\}.$$

Остальные случаи точки M доказываются аналогично. □

Лемма 5.4. *Рассмотрим кривую*

$$\eta = \eta(s) = \begin{cases} \gamma_\sigma(s), & s \in [0, s_0], \\ \exp((s - s_0)Z)\big(\gamma_\sigma(1)\big), & s \in [s_0, s_0 + \tau], \end{cases}$$

где $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma(s)$, $\gamma(0) = O$, — cc-кратчайшая группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, восстановленная по cc-кратчайшей $\sigma = \sigma(s)$ группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$. Тогда

$$d_{cq}(O, \eta(s)) \leq d_{cq}(O, \eta(s_0 + \tau)) = \max\{l(\gamma_\sigma), |\tau|^{\frac{1}{3}}\} \quad \forall s \in [0, s_0 + \tau].$$

Доказательство. Лемма 5.4 вытекает из определения функции расстояния d_{cq} (см. § 5.1). □

Символом d_{cc} обозначим метрику Карно—Каратеодори группы $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$; пусть

$$B_{cc}(v,r) = \{u \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \mid d_{cc}(v,u) < r\}.$$

Теорема 5.5. *Симметрическая функция расстояния d_{cq} билипшицево эквивалентна метрике Карно—Каратеодори d_{cc}.*

Доказательство. Будем использовать обозначение

$$B_{cq}(v,r) = \{u \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \mid d_{cq}(v,u) < r\}.$$

Рассмотрим произвольную cc-кратчайшую $\sigma = \sigma(s)$ единичной длины, параметризованную длиною дуги,

$$\sigma = \sigma(s) = (x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)(s) \subset \mathbb{H}^1_\alpha, \quad \sigma(0) = O'.$$

Пусть $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma(s) = (x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma, z_\sigma)(s) \subset \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, $s \in [0,1]$, $\gamma_\sigma(0) = O$, — cc-кратчайшая, восстановленная по σ. Пусть

$$\sup_{s\in[0,1]} |z_\sigma(s)| = h_\sigma, \quad h = \sup_\sigma h_\sigma.$$

Учитывая Лемму 5.4, мы можем сделать вывод о том, что найдутся числа ε_0, h_0 такие, что для каждой точки множества $w \in S(\varepsilon_0, h_0)$ выполняется

$$d_{cq}(O,w) < \hat{h}$$

для некоторой константы $\hat{h} = \hat{h}(h)$, не зависящей от выбора точки w; здесь

$$S(\varepsilon_0, h_0) = \bigcup_{u\in S_0(\varepsilon_0)} \exp(sT)(u), \quad s \in [-h_0, h_0],$$

где

$$S_0(\varepsilon_0) = \bigcup M(x,y,t,0), \quad \rho_{cc}\big(O', M'(x,y,t)\big) < \varepsilon_0.$$

Понятно, что найдется число $\hat{\varepsilon} > 0$ такое, что

$$B_{cc}(O, \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{h}}\hat{h}) = B_{cc}(O,\hat{\varepsilon}) \subset S(\varepsilon_0, h_0) \subset B_{cq}(O,\hat{h}). \tag{5.5}$$

С другой стороны, используя для группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ теорему Ball-Box и неравенство треугольника для метрики Карно—Каратеодори d_{cc}, несложно убедиться в том, что найдется константа $C_1 > 0$ такая, что

$$B_{cq}(O,\hat{h}) \subset B_{cc}(O, C_1\hat{h}). \tag{5.6}$$

Используя действие подгруппы растяжений δ_ε, см. Теорему 5.1, и (5.5), (5.6), мы получаем

$$B_{cc}(O, C_2 r) \subset B_{cq}(O, r) \subset B_{cc}(O, C_1 r), \tag{5.7}$$

где $C_2 = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{h}}$. Из (5.7) и инвариантности функции расстояния d_{cq} относительно действия левых сдвигов, мы получаем

$$\frac{d_{cc}(u,v)}{C_1} \leq d_{cq}(u,v) \leq \frac{d_{cc}(u,v)}{C_2}.$$

□

Следствие 5.6. *Функция d_{cq} удовлетворяет обобщенному неравенству треугольника.*

Свойство 5.7. *Пусть $d_{cq}(u,w) = l(\gamma_\sigma)$, см. (5.4). Тогда $d_{cq}(u,w) \leq d_{cq}(u,v) + d_{cq}(v,w)$ $\forall v \in \mathbb{E}_{\alpha,\beta}$.*

Доказательство. Свойство 5.7 вытекает из определения функции расстояния d_{cq} и обычного неравенства треугольника для метрики Карно — Каратеодори. □

Утверждение 5.8. *Существуют параметры α, β такие, что функция расстояния d_{cq} не будет симметрической $(1,q)$-квазиметрикой.*

Доказательство. Пусть α, β таковы, что $\frac{\alpha\beta}{16\pi^2} > 1$, см. Свойство 4.6. Пусть $A = A(0, 0, \frac{\alpha}{4\pi}, \frac{\alpha\beta}{16\pi^2})$. Мы имеем $d_{cq}(O, A) = \left|\frac{\alpha\beta}{16\pi^2}\right|^{\frac{1}{3}}$. Используя достаточно известные свойства распределения cc-кратчайших группы Гейзенберга (см. Свойство 4.3, а также [20]), Свойства 4.5, 4.6 и теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров, несложно сделать вывод о том, что найдется последовательность точек $\{A_i\}$, каждая из которых соединяется с точкой O некоторой cc-кратчайшей γ_{σ_i} группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, восстановленной по некоторой cc-кратчайшей σ_i группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, и при этом

$$A_i \to_{i\to\infty} A, \quad l(\gamma_{\sigma_i}) \to_{i\to\infty} 1, \quad d_{cq}(O, A_i) = l(\gamma_{\sigma_i}). \tag{5.8}$$

Из (5.8) мы получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} d_{cq}(O, A_i) \neq d_{cq}(O, A)$. Таким образом, при выбранных параметрах α, β симметрическая функция расстояния d_{cq} не является непрерывной по второму аргументу, а значит, и не может быть $(1,q)$-квазиметрикой, см. Следствие 1.3. □

Список литературы

1. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2018. Т. 82, № 2. С. 3–32.

2. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // *Докл. РАН.* 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.

3. *Arutyunov A. V. and Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

4. *Wilson W. A.* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

5. *Бахтин И. А.* Принцип сокращения в квазиметрических пространствах // В кн.: *Функциональный анализ.* Т. 30. Ульяновск: Ульяновский гос. пед. ин-т. 1989. С. 26–37.

6. *Czerwik S.* Contraction mappings in b-metric spaces // *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis.* 1993. V. 1. P. 5–11.

7. *Kirk W., Shahzad N. Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Springer International Publishing Switzerland, 2014.

8. *Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces.* New York, NY: Springer–Verl., 2001.

9. *Грешнов А. В.* (q_1, q_2)-Квазиметрики, билипшицево эквивалентные 1-квазиметрикам // *Матем. тр.* 2017. Т. 27, № 4. С. 253–262.

10. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providence, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

11. *Грешнов А. В., Трямкин М. В.* Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$-квазиметрик на канонических группах Карно // *Матем. заметки.* 2015. Т. 98, № 4. С. 635–639.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 18-41
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41

12. *Karmanova M. and Vodopyanov S.* Geometry of Carnot-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (*Trends Math.*) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

13. *Nagel A. , Stein E. M. and Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

14. *Грешнов А. В., Грешнова С. А.* Области допустимых параметров Box-квазиметрик канонических групп Гейзенберга и их обобщений // *Матем. тр.* 2024. Т. 27, № 4. С. 42–56.

15. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // In: *Sub-Riemannian geometry.* Prog. Math., V. 144, Birkhäuser, Basel, 1996. 79–323.

16. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry.* Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.

17. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian.* Berlin; Heidelberg; Springer–Verl., 2007.

18. *Pansu P.* Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. Math.* 1998. V. 119. P. 1–60.

19. *Greshnov A.* Optimal horizontal joinability on the Engel group // *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni.* 2021. V. 32. P. 535–547.

20. *Грешнов А. В.* Геометрия *cc*-шаров и константы в теореме Ball-Box на группалгебрах Гейзенберга // *Сиб. мат. журн.* 2014. Т. 55, № 5. С. 1040–1058.

21. *Ардентов А. А., Сачков Ю. Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // *Мат. сб.* 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.

22. *Ardentov A. A. and Yu. L. Sachkov.* Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // *J. Math. Sci.* 2013. V. 195, N 3. P. 369–390.

23. *Ardentov A. A. and Sachkov Yu. L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group //*ESAIM: COCV.* 2015. V. 21, N 4. P. 958–988.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 18-41
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41

24. *Ardentov A. A. and Sachkov Yu. L.* Maxwell strata and cut locus in the sub-Riemannian problem on the Engel group // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2017. V. 22, N 8. P. 909–936.

25. *Попов А. Ю., Сачков Ю. Л.* Субриманова сфера Энгеля // *Докл. РАН. Матем. информ. проц. упр.* 2021. Т. 500. С. 97–101.

26. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Экстремали левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля // *Сиб. матем. журн.* 2020. Т. 61, № 4. С. 735–751.

27. *Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V: Группы и алгебры Ли.* М.: Наука, 1982.

28. *Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

References

1. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // *Izvestiya: Mathematics.* 2018. V. 82, N 2. P. 245–272.

2. *Arutyunov A. V. and A. V. Greshnov A. V.* Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points // *Dokl. Math.* 2016. V. 94. P. 434–437.

3. *Arutyunov A. V. and Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results // *Fixed Point Theory.* 2022. V. 23. P. 473-486.

4. *Wilson W. A.* On quasi-metric spaces // *American J. of Math.* 1931. V. 53. P. 675–684.

5. *Bakhtin I. A.* The contraction mapping principle in almost metric space // In: Funct. Anal. V. 30. Ulyanovsk: Ulyanovsk Gos. Ped. Inst., 1989. P. 26–37.

6. *Czerwik S.* Contraction mappings in b-metric spaces // *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis.* 1993. V. 1. P. 5–11.

7. *Kirk W., Shahzad N. Fixed Point Theory in Distance Spaces.* Springer International Publishing Switzerland, 2014.

8. *Heinonen J. Lectures on Analysis on Metric Spaces.* New York, NY: Springer–Verl., 2001.

9. *Greshnov A. V.* (q_1, q_2)-quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics // *Siberian Adv. Math.* 2017. V. 27. P. 253–262.

10. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory Spaes and Differentiability of Mappings // In: *Contemporary Mathematis.* V. 424. Providence, RI: AMS, 2007. P. 247–301.

11. *Greshnov A. V. and Tryamkin M. V.* Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups // Math. Notes. 2015. V. 98, N 4. P. 694–698.

12. *Karmanova M. and Vodopyanov S.* Geometry of Carnot-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // *Analysis and Mathematical Physics.* (*Trends Math.*) Basel: Birkhauser, 2009. P. 233–335.

13. *Nagel A. , Stein E. M. and Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // *Acta Math.* 1985. V. 155. N 1–2. P. 103–147.

14. *Greshnov A. V. and Greshnova S. A. The domains of admissible parameters of Box-quasimetrics of canonical Heisenberg groups and their generalizations* // Mat. Tr. 2024. V. 27, N 4. P. 42–56.

15. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // In: *Sub-Riemannian geometry.* Prog. Math., V. 144, Birkhäuser, Basel, 1996. 79–323.

16. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry.* Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.

17. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian.* Berlin; Heidelberg; Springer–Verl., 2007.

18. *Pansu P.* Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. Math.* 1998. V. 119. P. 1–60.

19. *Greshnov A.* Optimal horizontal joinability on the Engel group // *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni.* 2021. V. 32. P. 535–547.

20. *Greshnov A. V.* The geometry of *cc*-balls and the constants in the Ball-Box theorem on Heisenberg group algebras // *Siberian Math. J.* 2014. V. 55, N 5. C. 849–865.

21. *Ardentov A. A. and Sachkov Yu. L.* Extremal trajectories in a nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // *Sb. Math.* 2011. V. 202, N 11. P. 1593–1615.

22. *Ardentov A. A. and Yu. L. Sachkov.* Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // *J. Math. Sci.* 2013. V. 195, N 3. P. 369–390.

23. *Ardentov A. A. and Sachkov Yu. L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group //*ESAIM: COCV*. 2015. V. 21, N 4. P. 958–988.

24. *Ardentov A. A. and Sachkov Yu. L.* Maxwell strata and cut locus in the sub-Riemannian problem on the Engel group // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. V. 22, N 8. P. 909–936.

25. *Sachkov Yu. L. and Popov A. Yu.* Sub-Riemannian Engel sphere // *Dokl. Math.*. 2021. V. 104, N 2. P. 301–305.

26. *Berestovskii V. N. and Zubareva I. A.* Extremals of a left-invariant sub-finsler metric on the Engel group // *Siberian Math. J.* 2020. V. 61, N 4. P. 735–751.

27. *Postnikov M. M. Lectures in Geometry. Semester V: Lie Groups and Lie Algebras*. Moscow: Mir, 1982.

28. *Ovsyannikov L. V. Group Analysis of Differential Equations*. New York: Academic, 1982.

Информация об авторах

Александр Валерьевич Грешнов, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988
Scopus Author ID 6506409279

Максим Владимирович Трямкин, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 5249-1504 AuthorID: 814766
Scopus Author ID 56009621100

Author Information

Alexandr V. Greshnov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 6093-9948 AuthorID: 14988
Scopus Author ID 6506409279

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 18-41
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 18-41

Maxim V. Tryamkin, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 5249-1504 AuthorID: 814766
Scopus Author ID 56009621100

Статья поступила в редакцию 25.08.2025;
одобрена после рецензирования 26.11.2025; принята к публикации 21.01.2026

The article was submitted 25.08.2025;
approved after reviewing 26.11.2025; accepted for publication 21.01.2026